ARISTO

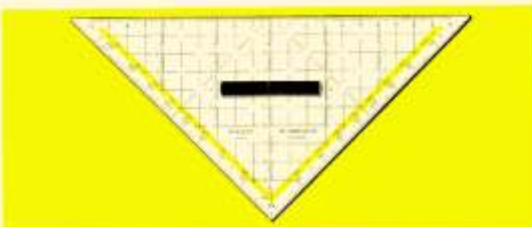
ARISTO-Dreikant-Maßstäbe mit Griffleiste

Bei allen ihren Vorzügen weisen Dreikant-Maßstäbe bisher einen Nachteil auf. Nimmt man sie zur Hand, so wird viel Zeit damit verbracht, durch Drehen und Wenden die gewünschte Teilung zu finden. Dieses Problem hat ARISTO erfolgreich gelöst.

ARISTO-Dreikant-Maßstäbe erhalten ohne Mehrpreis eine durchgehende, aufsteckbare und zweifarbige Griffleiste, die auf einen Blick die gesuchte Teilung erkennen läßt. Die sanfte Wölbung der Griffleiste „entschärft" auch die oben liegende Facette, deren Kante sich beim Arbeiten unangenehm in die Hand drückt.

ARISTO-TZ-Dreieck

Das praktische Zeichendreieck mit den unerschöpflichen Anwendungsmöglichkeiten wird aus unzerbrechlichem, maßbeständigem und transparentem ARISTOPAL gefertigt. Millimeter-Teilungen senkrecht zur Hypotenuse und das 1-cm-Gitternetz erleichtern das Schraffieren, das Zeichnen von Parallelen, symmetrischen Figuren, rechten Winkeln sowie das Auftragen und Ablesen rechtwinkliger Koordinaten. Die Winkelteilung ist in 360° oder 400 g lieferbar.



ANLEITUNG ZUM RECHENSTAB

ARISTO

STUDIO

868 · 0968 · 01068

Normzahlen-Maßstab 1364

20.2 Zweck der NZ-Skala

In erster Linie soll die NZ-Skala eine Gedächtnisstütze sein, so daß die gebräuchlichsten NZ-Werte immer zur Hand sind. Ferner sind sie praktisch für die Herstellung einfacher und doppeltlogarithmischer Netze auf gewöhnlichem kariertem Papier für übersichtliche nomographische Auswertungen. Da das Multiplizieren und Dividieren von Normzahlen mit bzw. durch Normzahlen immer wieder eine Normzahl ergibt, wird eine Netztafel aus Normzahlen zur graphischen Rechentafel.

Die Vereinigung von Normzahlen und Mantissen in einer Skala hat den Vorteil, daß logarithmische Überschlagsrechnungen sehr vereinfacht werden, denn den Normzahlen stehen in der Mantissenskala einfache Logarithmen gegenüber, die leicht im Kopf addiert oder subtrahiert werden können. Durch Hinzufügen der Kennziffern (wie beim Rechnen mit der Logarithmentafel) erhält man ein im Stellenwert richtiges Ergebnis, das um höchstens 3% ungenau ist, wenn man die Reihe R 40 in die Rechnung einschließt.

In vielen Fällen kann man sich gleichfalls der NZ-Skala bedienen, wenn man großzügig abrundet, z. B. für $\pi = 3{,}15$ oder für $\gamma = 7{,}85$ den Wert $\gamma = 8$ setzt. Die den Normzahlen entsprechenden Mantissen werden aus der über den Normzahlen liegenden Mantissenskala abgelesen. Besondere Aufmerksamkeit ist den Kennziffern zu schenken, da von diesen die Rechensicherheit wesentlich abhängt.

Bei umfangreicheren Formeln ist es vorteilhaft, die Logarithmen beim Ablesen aufzuschreiben, um die Addition nachprüfen zu können. Natürliche Zahlen kleiner als 1 (z. B. 0,8) werden oft besser durch negative Logarithmen ausgedrückt, z. B. $\lg 0{,}8 = -0{,}1$ statt $\lg 0{,}8 = 0{,}9 - 1$.

Die Teilungen L und D erlauben eine genauere logarithmische Rechnung, denn sie bilden eine dreistellige graphische Logarithmentafel.

20.3 Logarithmische Maßstäbe

Für das genauere Auftragen von logarithmischen Skalen oder Netzen befinden sich auf dem NZ-Maßstab logarithmische Teilungen der Basislängen 200 mm, 150 mm, 100 mm, 50 mm und 25 mm. Die Basislängen 125 mm und 250 mm können der Rechenstabzunge entnommen werden.

20.4 Umrechnungsfaktoren für nichtmetrische Einheiten

Beim Studium englischer und amerikanischer Fachbücher bereiten die nichtmetrischen Einheiten große Schwierigkeiten, weil die Beziehungen zum metrischen System oft mühselig in der Literatur gesucht werden müssen. Diese Sucharbeit nehmen die Tabellen des Maßstabes weitgehend ab, weil darauf die wichtigsten Umrechnungsfaktoren zusammengestellt sind. Als Grundlage diente hauptsächlich U. Stille, Messen und Rechnen in der Physik, Verlag Vieweg & Sohn.

20.5 Veröffentlichungen über Normzahlen

Berg, S.: Angewandte Normzahl, Berlin und Köln 1949.

Kienzle, O.: Normungszahlen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Tuffentsammer, K., und P. Schumacher: Normzahlen — die einstellige Logarithmentafel des Ingenieurs. Werkstattstech. und Masch.-Bau 43 (1953), S. 156.

Tuffentsammer, K.: Das Dezilog, eine Brücke zwischen Logarithmen, Dezibel, Neper und Normzahlen. VDI-Zeitschrift 98 (1956), S. 267/74.

Strahringer, W.: Zauberwelt der Normzahlen, Verlags- und Wirtschaftsgesellschaft der Elektrizitätswerke m. b. H. VWEW, Frankfurt a. M. 1952.

Printed in Germany by Borek KG. · 10720

19.4 Abnehmen des Läufers

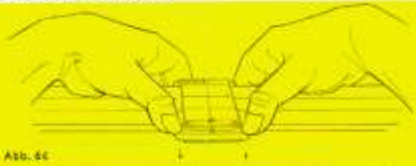


Abb. 64

Die Läuferstriche sind zum Skalenbild so justiert, daß während der Rechnung der Übergang von einer Seite des Rechenstabes zur anderen möglich ist. Der Läufer kann zum Zwecke der Reinigung abgenommen werden, ohne daß dabei die Justierung verlorengeht. Auf einer Seite sind die Läufergläser mit vier Schrauben, auf der anderen Seite mit zwei als Druckknöpfe ausgebildeten Schrauben an den Läuferstegen befestigt. Zum Abnehmen des Läufers vom Rechenstab werden die mit den Pfeilen markierten Enden des Läufersteges mit den Daumennagelspitzen nach unten gedrückt, damit sich der Druckknopf öffnet. Der obere Druckknopf öffnet sich beim Hochklappen des Läuferglases, und der Läufer kann leicht abgenommen werden.

19.5 Justieren des Läufers

Falls gelegentlich eine Justierung erforderlich ist, z. B. beim Aufsetzen eines Ersatzläufers, wird der Rechenstab so auf den Tisch gelegt, daß die Läuferseite mit den vier Schrauben oben liegt. Nach Lockerung dieser vier Schrauben mit einem passenden Schraubenzieher wird der Rechenstab umgedreht und der Läuferstrich genau über die Endstriche der Winkelteilungen gestellt. Vorsichtig wird der Rechenstab wieder gewendet, ohne den Läufer zu bewegen, und dann bei festgehaltenem Läufer das obenliegende Läuferglas nach den Endwerten 1 bzw. nach den Hilfsmarken in den LL-Skalen ausgerichtet. Danach werden die vier Schrauben wieder fest angezogen.

20. Der Normzahlen-Maßstab 1364

(nur bei Nr. 0968 und 01068)

20.1 Aufbau der Normzahlen-Skala

Normung und Typisierung sind wichtige Faktoren jeder rationellen Fertigung geworden; damit erlangen die Normzahlen (NZ) in der Technik immer mehr Bedeutung. Die Normzahlen nach DIN 323 sind ausgewählte Werte einer geometrischen Reihe, die auf das dekadische Zahlensystem zugeschnitten sind. Die Zusammenhänge werden beim Betrachten der logarithmischen Teilung D und der dazugehörigen Mantissenskala L sehr deutlich.

Gegenüber den gleichmäßig gestuften Mantissenwerten der Skala L stehen in Skala D die dazugehörigen Numeri. Die Normzahlen nach DIN 323 sind Abrundungen dieser Numeri.

Aus den Skalen L und D entsteht eine NZ-Skala, wenn man die D-Skala fortläßt und die Normzahlen an die entsprechenden Teilstriche der vereinfachten Mantissenskala anschreibt.

Den zehn bezifferten Teilstrichen der oberen Mantissenteilung stehen die Normzahlen der Reihe R 10 gegenüber. Die Aufteilung der Mantissenteilung in 20 gleiche Teile führt zu den Normzahlen der Reihe R 20 und aus 40 gleichen Intervallen wird die Reihe R 40 gebildet.

Neben dem mm-Maßstab sind die NZ-Werte zusätzlich markiert, und zwar die Reihe: R 10 mit Pfeilspitzen, R 20 mit Strichen und R 40 mit Punkten. Damit können NZ-Werte in Zeichnungen abgetragen werden.

INHALT

1. Allgemeines

Diese Gebrauchsanleitung gibt Auskunft über die Skalen des Rechenstabes, ihre Bereiche und ihren Verwendungszweck. Es wird erklärt, wie mit den Skalen gerechnet wird und welche Beziehungen untereinander bestehen. Für jede Skala sind Beispiele angegeben, um das Prinzip zu erläutern. Wie in einer Formelsammlung ist das Wichtigste zusammengestellt.

Zum Stabrechnen gehört Übung! Für Übungen und ausführliche Erläuterungen empfehlen wir die Lehrbücher:

Hassenpflug: Der Rechenstab ARISTO-Studio
Stender/Schuchardt: Der moderne Rechenstab

1.1 Handhabung des Rechenstabes

Zum Rechnen wird der Rechenstab am besten in die Hand genommen und so zum Licht gedreht, daß der Läuferstrich keine Schatten werfen kann. Das Einstellen der Zunge erfolgt am genauesten durch Druck und Gegendruck. Mit der einen Hand wird das herausragende Zungenende mit Daumen und Zeigefinger dicht hinter dem Rechenstabkörper umfaßt, so daß durch Bewegen der Finger bei gleichzeitigem Abstützen gegen den Stabkörper Zug- und Druckbewegungen möglich sind. Mit der anderen Hand wird die obere Leiste des Rechenstabkörpers so umfaßt, daß die Daumenspitze einen Gegendruck auf das Zungenende ausüben kann.

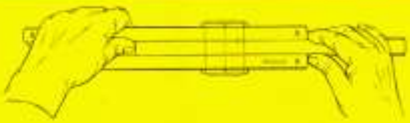


Abb. 1

Das Einstellen des Läufers kann mit einer Hand vorgenommen werden, genauer und schneller aber mit Daumen und Zeigefinger beider Hände. Damit der Läufer nicht verkantet und der Läuferstrich immer senkrecht zu den Teilungen geführt wird, soll die Führungskante des Läufers, die der Läuferfeder gegenüber liegt, leicht gegen die Stabkante gedrückt werden.

1.2 Eigentumsvermerk

Im Etui befindet sich unter dem ARISTO-Normzahlen-Maßstab 1364 ein transparenter Einsatz, der als Fach für den Maßstab dient. Das darunter eingeschobene Kärtchen kann nach Aufbiegen der transparenten Lasche herausgenommen und mit dem Namen beschrieben werden.

1.3 Die Behandlung des ARISTO-Rechenstabes

Der Rechenstab ist ein wertvolles Rechenhilfsmittel und braucht eine pflegliche Behandlung. Die Skalen und der Läufer sind vor Verschmutzung und Kratzern zu schützen, damit die Ablesegenauigkeit nicht beeinträchtigt wird.
Es empfiehlt sich, den Rechenstab von Zeit zu Zeit mit dem Spezialreinigungsmittel DEPAROL zu reinigen und trocken nachzupolieren. Keinesfalls dürfen irgendwelche Chemikalien verwendet werden, da diese die Teilung zerstören können.

19. Der Läufer und seine Marken

19.1 Die Marke 36 (nur bei Nr. 868 und 0968)

Der Läufer hat auf der Vorderseite (Abb. 62) rechts oben einen kurzen Strich, der auf den Skalen CF/DF den Wert 36 angibt, wenn der Mittelstrich über dem Anfang der Skalen C/D steht. Auf diese Weise multipliziert man mit 36, wenn man bie beliebiger Läuferstellung von C/D nach CF/DF überwechselt, dadurch bietet der Läufer bequeme Umrechnungen für:

1 Stunde = 3600 Sekunden

1 m/s = 3,6 km/h

1° = 3600''

1 Jahr = 360 Tage

1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ J

$\varkappa_{Al} = 36 \frac{m}{\Omega\, mm^2}$ (Leitwert)

Abb. 62

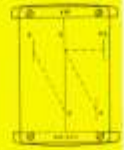


Abb. 63

19.2 Kreisflächen, Gewicht von Flußstahlstangen

Auf der Rückseite des Läufers (Abb. 63) gibt der Abstand vom Mittelstrich zum linken oberen und zum rechten unteren kurzen Strich den Faktor $\pi/4 = 0{,}785$ (bezogen auf die Quadratskalen) zur Berechnung von Querschnitten (Kreisflächen) nach der Formel $q = d^2 \pi/4$ an. Steht der mittlere Läuferstrich über dem Durchmesser d auf Skala D, kann der Querschnitt links oben auf Skala A abgelesen werden. Die gleiche Beziehung besteht auch zwischen dem rechten unteren und dem mittleren Strich.

Da der Strichabstand gleichzeitig dem spezifischen Gewicht 7,85 g/cm³ von Flußstahl entspricht, kann — anschließend an die Querschnittsablesung am Mittelstrich — das Gewicht von Flußstahlstangen für die Längeneinheit am linken Strich abgelesen werden. Zieht man den Anfang der Zungenskala B schließlich unter diesen linken oberen Strich, so erhält man beim Verschieben des Läufers das Gewicht für jede beliebige Länge. Diese Vereinfachung entfällt bei Nr. 01068, weil infolge der doppelten Basislänge der Faktor $\pi/4$ nur einmal enthalten ist, wenn man von rechts unten nach links oben übergeht.

19.3 Die Marken kW und PS

Der Abstand zwischen dem Mittelstrich und der rechten oberen Marke gibt in den Quadratskalen den Faktor für die Umwandlung von kW in PS und umgekehrt an (s. Abb. 63).

Stellt man z. B. den Mittelstrich auf 20 kW, so gibt die obere rechte Marke 27,2 PS an. Umgekehrt liefert die Einstellung von 7 PS mit der rechten Marke am Mittelstrich 5,15 kW. Für Umrechnungen im Zollsystem gibt es einen Spezialläufer mit der Marke HP. Dieser Läufer ist unter der Bezeichnung L 0968 E erhältlich.

Bei dem 50 cm langen Rechenstab Nr. 01068 steht die Bezeichnung kW an der Marke links oben. Die gleichen Umrechnungen werden mit dieser kW-Marke und der rechten PS-Marke durchgeführt.

Beispiel: lg 1,03 = 0,01283 mit der Skala LL1
lg 1,03 = 0,013 mit der Skala L

Übungsbeispiele:

$\log_{10} 50 = 1{,}699$
$\log_{10} 2 = 0{,}301$
$\log_{10} 1{,}03 = 0{,}01283$
$\log_{10} 0{,}015 = -1{,}824$
$\log_{10} 0{,}5 = -0{,}3010$
$\log_{10} 0{,}1 = -1$
$\log_{10} 6 = 0{,}778$
$\log_{10} 1{,}14 = 0{,}0569$
$\log_{10} 1{,}015 = 0{,}00647$

Beim Einstellen mit dem Endstrich der Skala C liegen die Ablesungen alle links vom Basiswert, sie sind also < 1, z. B. $\log_{10} 9 = 0{,}954$. Logarithmen von Zahlen < 1 sind negativ.

17.6.3 Die natürlichen Logarithmen

Die natürlichen Logarithmen der Basis e werden einfach durch den Übergang von den Exponentialskalen zur Grundskala D gefunden (Abb. 37).

Übungsbeispiele:

$\ln 4{,}375 = 1{,}475$
$\ln 0{,}622 = -0{,}675$
$\ln 0{,}05 = -2{,}994$

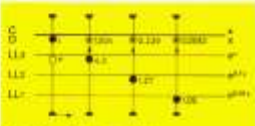


Abb. 37 $\ln 4{,}5 = 1{,}504$
$\ln 1{,}27 = 0{,}239$
$\ln 1{,}06 = 0{,}0583$

18. Weitere Anwendungen der Exponentialskalen

Die Zunge der Exponentialseite enthält außer der Grundteilung C und der Quadratskala B die Mantissenskala L und die Kubikteilung K, so daß außer den üblichen Berechnungen von x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ und lg x auch Potenzen der Formen $a^{\sqrt{x}}$, $a^{\sqrt[3]{x}}$, a^{10^x} sowie umgekehrt Logarithmen der Formen $\log_a {}^2x$, $\log_a {}^3x$, $\lg \log_a x$ berechnet werden können.

Die Skala CF kann auch in Verbindung mit den Exponentialskalen benutzt werden, um das Durchschieben der Zunge bei Tabellenbildungen einzusparen.

18.1 Proportionsrechnung mit den Exponentialskalen

Wenn ein Basiswert a mit dem Anfang der Skala C auf einer LL-Skala eingestellt ist, können die Potenzwerte für beliebige Exponenten oder die Logarithmen beliebiger Zahlen für diese Basis abgelesen werden. Die auf einer LL-Skala eingestellte Basis a ist somit ein Proportionalitätsfaktor.

18.1.1 $y_1 = a^n \qquad y_2 = a^m$

$\log y_1 = n \cdot \log a \qquad \log y_2 = m \cdot \log a$

$$\frac{\log a}{1} = \frac{\log y_1}{n} = \frac{\log y_2}{m}$$

$$\text{bzw. } \frac{\ln a}{1} = \frac{\ln y_1}{n} = \frac{\ln y_2}{m}$$

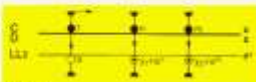


Abb. 58

2.2 Exponentialseite:

LL01	Exponentialskala,	Bereich: 0,99—0,9	$e^{-0,01x}$	auf der oberen Körperleiste
LL02		Bereich: 0,91—0,35	$e^{-0,1x}$	
LL03		Bereich: 0,4 —10^{-5}	e^{-x}	
A	Quadratskala		x^2	auf der Zunge
B	Quadratskala		x^2	
L	Mantissenskala		lg x	
K	Kubikskala		x^3	
C	Grundskala		x	
D	Grundskala		x	auf der unteren Körperleiste
LL3	Exponentialskala:	Bereich: 2,5 —10^5	e^x	
LL2		Bereich: 1,1 —3,0	$e^{0,1x}$	
LL1		Bereich: 1,01—1,11	$e^{0,01x}$	

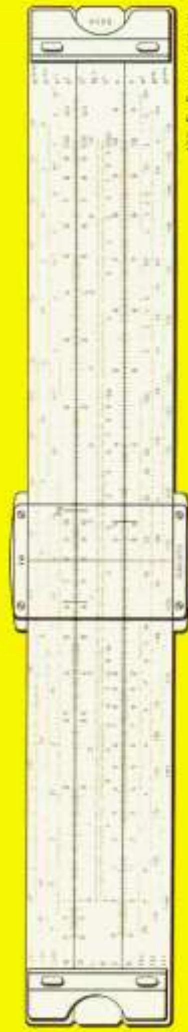


Abb. 5 Exponentialseite

3. Lesen der Skalen

Für den Gebrauch des Rechenstabes ist es wesentlich, die Skalen schnell und sicher abzulesen. Die Abbildungen 6 bis 9 zeigen Ablesebeispiele auf den am meisten benutzten Grundskalen C und D. Die Hauptintervalle sind durch lange Teilstriche mit den Ziffern 1 bis 10 gekennzeichnet (Abb. 6). Die 10 ist auf der Winkelseite wieder als 1 bezeichnet, da dieser Teilstrich als Beginn einer neuen Skala angesehen werden kann, die mit der vorausgehenden identisch ist.

Abb. 6 Die Hauptintervalle

Im Bereich der Ziffern 1 bis 2 ähnelt die Skala dem Teilungsbild eines Millimeter-Maßstabes, der Unterschied besteht nur darin, daß die Teilungsintervalle nach rechts hin immer kleiner werden.

Abb. 7 Ablesen im Bereich von 1 bis 2

Die Ziffer 2 eines Millimeter-Maßstabes kann 2 cm, 20 mm, 0,2 dm, 0,02 m usw. gelesen werden; d. h. abgesehen von der Dimension tritt die 2 in Verbindung mit verschiedenen Zehnerpotenzen auf. Ähnlich sagt auch die Ziffer der Rechenstabskala nichts über die Kommastellung aus. Deshalb ist es ratsam, nur Ziffernfolgen ohne Komma abzulesen und die Ziffern einzeln zu sprechen, z. B. Eins-Drei-Vier, nicht aber einhundertvierunddreißig. Dann werden keine Ziffern vertauscht oder ausgelassen. Verschiebt man zur Übung den Läuferstrich langsam vom Wert 1 nach rechts und liest an jedem einzelnen Teilstrich ab: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113 usw.
Der Läuferstrich ist im Vergleich zur Breite des Intervalls so dünn, daß die Mitte zwischen zwei Teilstrichen sicher eingestellt werden kann. Das Auge unterscheidet aber auch kleine Bruchteile eines Intervalls, so daß man bei einiger Übung den zehnten Teil des Intervalls schätzen kann und damit die vierte Stelle erhält.
Zur Übung wird der Läuferstrich langsam weiter nach rechts verschoben, zwischen den Teilstrichen 1310 und 1320 wird beispielsweise geschätzt: 1311, 1312, 1313, 1314, 1315 usw.
Zwischen einem bezifferten Teilstrich und dem ihm folgenden sind die Nullen zu beachten, besonders am Beginn der Skala, z. B. 1000, 1001, 1002, 1003 usw. (vgl. 1007 in Abb. 7).

Abb. 8 Ablesen im Bereich von 2 bis 4

Da die Teilungsintervalle links von der Ziffer 2 bereits sehr eng werden, ist in dem daran anschließenden Bereich zwischen den Ziffern 2 und 4 nur noch jeder zweite Teilstrich eingraviert; daraus ergibt sich ein neues Teilungsbild, bei dem von Strich zu Strich die geraden Werte abgezählt werden: 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214 usw. Die Mitten der Intervalle geben die ungeraden Werte an: 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213 usw. Abb. 8 zeigt einige Ablesebeispiele.

Abb. 9 Ablesen im Bereich von 4 bis 10

Rechengang:

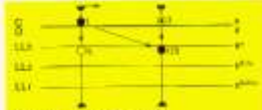


Abb. 54 $\log_5 125 = 3{,}0$

a) Einstellung des Läufers auf den Basiswert a in Skala LL.

b) Zungenanfang oder -ende unter den Läuferstrich stellen.

c) Einstellung des Numerus y auf der LL-Skala mit dem Läuferstrich.

d) Ablesung des Logarithmus unter dem Läuferstrich in Skala C.

Die Stellung des Kommas erhält man aus der Beziehung: $\log_a a = 1$

Stellt man den Zungenanfang über die Basis a, dann sind die Logarithmen rechts vom Wert a größer als 1 und links davon kleiner als 1.

Ableseregel:

a) Jeder Übergang zur benachbarten LL-Skala — in der Reihenfolge LL3, LL2, LL1 oder LL03, LL02, LL01 — bewirkt für den Logarithmus eine Verschiebung des Kommas um eine Stelle nach links, in der umgekehrten Reihenfolge nach rechts.

b) Die Logarithmen werden positiv (negativ), wenn der Numerus und die Basis auf gleichfarbigen (ungleichfarbigen) LL-Skalen eingestellt werden.

Übungsbeispiele:

$$\log_2 16 = 4{,}0$$
$$\log_2 1{,}02 = 0{,}02857$$
$$\log_2 0{,}25 = -2$$

17.6.2 Die dekadischen Logarithmen

Wird die 1 der Skala C über die Basis 10 in Skala LL3 gestellt, kann zu jedem in der LL-Skala eingestellten Numerus der dekadische Logarithmus in Skala C abgelesen werden (Abb. 55 und 56).

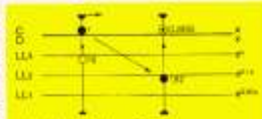


Abb. 55 lg 1,92 = 0,2833

Für die oft benötigten dekadischen Logarithmen befindet sich zusätzlich auf der Zunge die übliche Skala L, die nur die Mantissen angibt, wenn der Numerus in Skala C eingestellt wird. Wie bei der Benutzung einer Logarithmentafel wird die Kennziffer des Logarithmus nach der Regel „Stellenzahl minus 1" gebildet und zur Mantisse addiert. Über jedem Wert der Skala C steht somit sein Logarithmus, und umgekehrt kann zu jedem Logarithmus der Numerus direkt abgelesen werden.

Zur Benutzung der Skala L wird nur der Läufer verschoben, damit werden die dekadischen Logarithmen mit dieser Skala einfacher als mit den LL-Skalen gefunden. Dagegen werden die Ergebnisse für den Bereich der Skala LL1 genauer abgelesen.

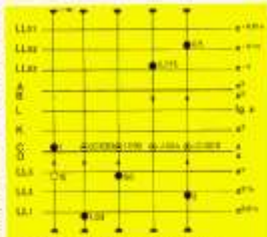


Abb. 56 Dekadische Logarithmen

Läufer auf Skala D für Potenzen der Basis e. Zur Erläuterung folgt das Beispiel für den Exponenten 1,489 mit seinen dezimalen Variationen.

$e^{1,489} = 4,43$ $\qquad e^{-1,489} = 0,2257$

$e^{0,1489} = 1,1605$ $\qquad e^{-0,1489} = 0,8617$

$e^{0,01489} = 1,015$ $\qquad e^{-0,01489} = 0,98522$

Bei weiteren Variationen wird wieder die Übereinstimmung mit $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$ erreicht. $\qquad e^{0,001489} = 1,001489$

17.5 Wurzeln $a = \sqrt[x]{y}$

Mit den Exponentialskalen lassen sich Wurzeln mit beliebigen Radikanden ziehen. Das Radizieren, die Umkehrung des Potenzierens, gleicht dem Rechengang einer Division mit den LL-Skalen und der Grundskala C. Wird die Potenz $3,2^{2,5} = 18,3$ gemäß Abschnitt 17.2 eingestellt, so kann in der umgekehrten Richtung $\sqrt[2,5]{18,3} = 3,2$ abgelesen werden.

Rechengang:

a) Gegenüberstellung des Radikanden y auf der LL-Skala und des Wurzelexponenten x auf der Zungenskala C.

b) Ablesung des Wurzelwertes unter dem Zungenanfang oder Zungenende auf der entsprechenden LL-Skala.

Die Ableseregeln von Abschnitt 17.2 finden auch hier eine sinngemäße Anwendung. Es ist dabei zu beachten, daß die Ablesung unter dem rechten Zungenende auf der nächst niedriger bezifferten Skala (LL1 – LL3 oder LL01 – LL03) erfolgen muß.

Beispiele:

$\sqrt[0,77]{21} = 52,1 \qquad \dfrac{1}{\sqrt[0,77]{21}} = 0,0192$

$\sqrt[7,7]{21} = 1,485 \qquad \dfrac{1}{\sqrt[7,7]{21}} = 0,6734$

$\sqrt[77]{21} = 1,0403 \qquad \dfrac{1}{\sqrt[77]{21}} = 0,96122$

Abb. 53 Wurzeln

17.6 Logarithmen

17.6.1 Logarithmen beliebiger Basis

Mit den Exponentialskalen können beliebige Logarithmen ermittelt werden. Die Logarithmen ergeben sich aus der Umkehrung der Potenzbildung. Den Lösungsweg erkennt man am besten aus einer Gegenüberstellung mit der Potenzaufgabe und ihrer Umkehrung.

$y = a^x \qquad x = \log_a y$ (lies: Logarithmus y zur Basis a)

Die Bestimmung des Logarithmus ist identisch mit der Lösung einer Potenzaufgabe, bei welcher der Exponent gesucht wird.

Im Bereich von 4 bis 10 springen die Markierungen um 5 Einheiten, so daß die Ablesungen an den aufeinanderfolgenden Teilstrichen 400, 405, 410, 415, 420, 425, 430 usw. lauten.

Die Zwischenwerte müssen geschätzt werden, in der Mitte zwischen 400 und 405 liegt der Wert 4025, etwas links davon 402, etwas rechts 403. Entsprechend gibt die Mitte des nächsten Intervalls den Wert 4075 an. Abb. 9 zeigt eine Reihe von Einstellungen.

4. Lesen der Skalen beim Taschenrechenstab

(nur für 868)

Wegen der kürzeren Basislänge sind die Skalen beim Taschenrechenstab anders unterteilt als beim 25 cm langen Rechenstab. Die drei verschiedenen Grundintervalle treten hier in anderer Reihenfolge auf.

Abb. 10

Im Bereich von 1 bis 2 sind nur die Werte 1, 1,5 und 2 beziffert. Die zweite Stelle wird an den langen Teilstrichen abgezählt, wie die eingeklammerten Zahlen zeigen, z. B. (12). Die dazwischenliegenden kurzen Teilstriche führen jeweils um zwei Einheiten der dritten Stelle weiter, z. B. 124. Diese dritte Stelle ist immer eine gerade Zahl 0, 2, 4, 6 oder 8, die ungeraden Werte liegen in der Mitte der Intervalle, z. B. 103.

Im Bereich der bezifferten Teilstriche von 2 bis 5 wird die zweite Stelle wieder an den langen Teilstrichen abgezählt, z. B. (23). Die kurzen Teilstriche geben jeweils die 5 der dritten Stelle an, z. B. 215. Alle anderen Werte der dritten Stelle werden geschätzt.

Im Bereich von 5 bis 10 ist wieder nur die erste Stelle beziffert. Die zweite Stelle wird wie bei einem Millimetermaßstab an den kurzen Teilstrichen abgezählt, z. B. 52. Die dritte Stelle wird zwischen den kurzen Teilstrichen geschätzt, z. B. 583.

5. Überschlagsrechnung

Im Kapitel 3 wird betont, daß auf dem Rechenstab ausschließlich Ziffernfolgen eingestellt und abgelesen werden. Erst mit einer groben Überschlagsrechnung wird die richtige Kommastellung im Rechenergebnis festgelegt und damit gleichzeitig eine Kontrolle für die erste Ziffer der Stabrechnung durchgeführt.

Regeln für Überschlagsrechnungen:

Zahlenwerte stark abrunden!

z. B. $\quad 3,43 \approx 3 \qquad 9,51 \approx 10 \qquad 7,61 \approx 8$

Bei Multiplikationen den einen Faktor aufrunden, den anderen abrunden!

z. B. $\quad 8,92 \cdot 127 \approx 10 \cdot 120 = 1200$

$\qquad 2,19 \cdot 9830 \approx 2 \cdot 10000 = 20000$

Zähler und Nenner werden in der gleichen Richtung abgerundet.

z. B. $\frac{725}{539} = \frac{7,25}{5,39} \approx \frac{7}{5} = 1,4$

$\frac{640 \cdot 15,3}{51 \cdot 0,8} \approx \frac{60 \cdot 20}{5 \cdot 1} = 240$

Das Abspalten von Zehnerpotenzen erleichtert das Rechnen mit sehr großen oder sehr kleinen Zahlenwerten.

z. B. $73215 \approx 7 \cdot 10^4$ $\quad$ $0,0078 \approx 8 \cdot 10^{-3}$

$89 \approx 9 \cdot 10^1$ $\quad$ $0,706 \approx 7 \cdot 10^{-1}$

Beim Multiplizieren bzw. Dividieren mit sehr großen und sehr kleinen Zahlenwerten gewährleistet das Abspalten von Zehnerpotenzen eine bessere Übersichtlichkeit!

z. B. $0,07325 \cdot 0,000513 \approx 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 40 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-5}$

$\frac{2950}{0,00598} \approx \frac{3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^6$

6. Rechenprinzip

Gerechnet wird derart, daß Strecken mechanisch addiert oder subtrahiert werden. Auf einfachste Weise kann die Rechenmethode an Hand zweier gegeneinander verschiebbarer Millimeter-Maßstäbe erklärt werden.

Abb. 11 zeigt das Beispiel $2 + 3 = 5$. Wenn der Anfang des oberen Maßstabes über den Wert 2 des unteren Maßstabes gelegt wird, kann zu dieser eingestellten Strecke 2 mit Hilfe der oberen Skala beispielsweise die Strecke 3 addiert werden. Unter der 3 des oberen Maßstabes steht das Ergebnis 5 in dem unteren Maßstab. In der Abb. 11 könnte ebenfalls abgelesen werden $2 + 1 = 3$ oder $20 + 15 = 35$, wenn die Millimeter abgezählt werden.

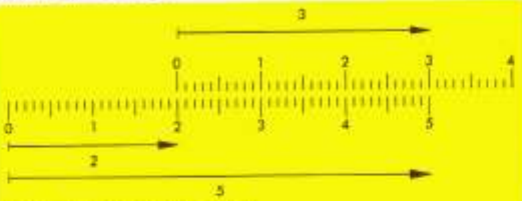


Abb. 11 Graphische Addition mit Skalen

Auch die Subtraktion $5 - 3 = 2$ läßt sich aus der Abb. 11 ablesen, der Vorgang wird dann nur umgekehrt. Von der Strecke 5 der unteren Skala wird die Strecke 3 der oberen Skala abgezogen, dazu werden die Werte 5 und 3 übereinandergestellt und unter dem Anfang der oberen Skala steht das Ergebnis 2 in der unteren Skala.

Beim Rechenstab befinden sich die Teilungen auf einem festen Körper und auf einer darin verschiebbaren Zunge. Die Eigenart des Rechenstabes besteht darin, daß logarithmisch geteilte Skalen aufgetragen sind. Die graphische Addition zweier Strecken ergibt damit eine Multiplikation, und die Subtraktion wird zur Division.

Wenn der Bereich der LL-Skalen für die Einstellung der Basis a nicht ausreicht, wird Skala D wie eine LL-Skala benutzt, aber mit dem Unterschied, daß an Stelle von $a = 1 \pm n$ der Wert $|n|$ eingestellt wird.

Wird die 1 der Skala C über n in Skala D gestellt, ist diese Einstellung praktisch identisch mit der Einstellung $1 \pm n$ in einer Exponentialskala, die man sich als Fortsetzung für den Bereich von 1,001 bis 1,01 bzw. 0,99 bis 0,999 usw. vorstellen kann. Mit kleiner werdendem n wird die Näherung $\ln (1 \pm n) = \pm n$ immer genauer.

Die Potenz wird wie üblich gebildet, ist aber jetzt eine einfache Multiplikation $n \cdot x$. Das der Skala D entnommene Ergebnis muß durch Addition der 1 bzw. Subtraktion von 1 vervollständigt werden. Kommt man mit größeren Exponenten in den Bereich der vorhandenen LL-Skalen, kann das Ergebnis direkt in der entsprechenden Exponentialskala abgelesen werden.

Beispiele:	Ablesung auf Skala
$1,0023^{3,7} = (1 + 0,0023)^{3,7} = 1,00851$	D zu 1 addieren
$1,0023^{37} = 1,0888$	LL1
$0,9977^{3,7} = (1 - 0,0023)^{3,7} = 0,99149$	D von 1 subtrahieren
$0,9977^{37} = 0,9184$	LL01

Wird der Läufer über den Anfang der Skala D gestellt, vermittelt die Abweichung des Teilstriches 1,01 der Skala LL1 gegen den Läuferstrich eine Vorstellung von der Größe des Fehlers, der bei der Näherungsrechnung maximal entstehen kann. Die Fehler der Näherung werden am größten, wenn in der Hilfsskala D eingestellt und auch abgelesen wird.

17.3.4 Steigerung der Rechengenauigkeit

Größere Genauigkeit wird erreicht, wenn die Abweichung der Grundskala D gegen die exakte Exponentialskala im Bereich 1,001 bis 1,01 durch Berücksichtigung des quadratischen Gliedes der Reihenentwicklung korrigiert wird.

A) $\ln (1 \pm n) = \pm n (1 \mp n/2)$ $\quad$ für die Basiseinstellung auf der Skala D

B) $e^{\pm x} = 1 \pm x (1 \pm x/2)$ $\quad$ für die Ablesung auf der Skala D

Wird das Ergebnis einer Exponentialskala entnommen, genügt die Korrektur nach Formel A für die Einstellung in Skala D. Wird dagegen nur mit der Skala D gerechnet, so muß die Einstellung und die Ablesung (Formel B) korrigiert werden.

Beispiel:

$1,0023^{3,7} = 1,00854$

$0,0023 \cdot (1 - 1/2 \cdot 0,0023) = 0,0023 \cdot 0,99885 = 0,002297$ wird an Stelle von $n = 0,0023$ in Skala D mit der Zungeneins eingestellt.

Die „Potenzbildung" $1 + 0,002297 \cdot 3,7$ gibt 1,00850. Als Ablesung in Skala D muß dieser Wert nach Formel B korrigiert werden:

$0,00850 \cdot (1 + 1/2 \cdot 0,00850) = 0,00850 \cdot 1,00425 = 0,00854$

Nach Addition der 1 lautet das Ergebnis 1,00854 (genau: 1,0085362).

Diese Rechnung sieht etwas kompliziert aus, ist aber bei einiger Übung recht einfach, so daß man schließlich die Korrekturen nach „Augenmaß" einstellen kann. Derartige Korrekturen sind nicht mehr erforderlich, wenn die Basis $< 1,001$ ist, weil dann mit der Näherung die Rechenstabgenauigkeit erreicht wird.

17.4 Potenzen $y = e^x$

$y = e^x$ ergibt sich aus der Grundstellung der Zunge, denn dann ist die Zahl $e = 2,718$ als Basis eingestellt. Da die Skala D aber diese Einstellung zu den Exponentialskalen ständig hat, genügt die Einstellung des Exponenten mit dem

17.3 Sonderfälle von $y = a^x$

Die Möglichkeiten, den Exponenten und die Basis zu variieren, sind durch den Bereich der Exponentialskalen begrenzt.

17.3.1 $y > 100\,000$ und $y < 0{,}000\,01$

Reicht das Ergebnis einer Potenz über den Bereich der Exponentialskalen hinaus, muß der Exponent in Summanden und somit die Potenz in Faktoren zerlegt werden.

Beispiel:

$$3{,}14^{19} = 3{,}14^{6+6+7} = (3{,}14^6)^2 \cdot 3{,}14^7 = 0{,}96^2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3 = 2{,}76 \cdot 10^9$$

Für negative Exponenten gilt selbstverständlich derselbe Lösungsweg.

17.3.2 $0{,}99 < y < 1{,}01$

Ist infolge eines kleinen Exponenten der Wert einer Potenz kleiner als 1,01, aber größer als 0,99, so kann das Ergebnis nicht der LL-Skala entnommen werden.

Die Reihenentwicklung

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a \pm \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \cdots$$

gibt für diese Fälle eine Näherungslösung:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a \qquad \text{für } |x \cdot \ln a| \ll 1$$

Wenn die 1 der Skala C mit Hilfe des Läufers über die Basis a in Skala LL gestellt wird, steht sie auch über dem Wert ln a in Skala D (vgl. Ziff. 17.4 und 17.6), und eine Multiplikation mit x durch Verschieben des Läufers über Skala C ergibt in Skala D die Ablesung $x \cdot \ln a$. Wird dieser Zwischenwert zu 1 addiert oder von 1 subtrahiert, erhält man den gesuchten Potenzwert $a^{\pm x}$. Je kleiner der Exponent, desto genauer wird das Ergebnis dieser Rechenmethode.

Beispiel:

$$3{,}2^{0{,}0025} = 1 + 0{,}0025 \cdot \ln 3{,}2 \qquad \text{(Als Fortsetzung des Beispiels } 3{,}2^x\text{)}$$
$$= 1 + 0{,}002908 = 1{,}002908$$
$$3{,}2^{-0{,}0025} = 1 - 0{,}002908 = 0{,}997092$$

Wird der Exponent im gleichen Sinne durch Verschieben des Kommas weiter verkleinert, so ändert sich im Ergebnis nur noch die Anzahl der Nullen oder Neunen hinter dem Komma.

$$3{,}2^{0{,}00025} = 1{,}0002908$$

17.3.3 $0{,}99 < a < 1{,}01$

Wenn in der Potenz $y = a^x$ die Basis größer als 0,99 aber kleiner als 1,01 ist, hilft eine ähnliche Näherungslösung.

Nach der vorherigen Reihenentwicklung gilt $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a$. Da a nahezu 1 ist, kann man schreiben: $a = 1 \pm n$. Damit gilt:

$$a^x = (1 \pm n)^x \approx 1 + x \cdot \ln(1 \pm n)$$
$$\ln(1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \cdots$$
$$\ln(1 \pm n) \approx \pm n \qquad (\text{für } |n| \ll 1)$$
$$(1 \pm n)^x \approx 1 \pm nx \qquad (\text{für } |nx| \ll 1)$$
$$(1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp nx \qquad (\text{für } |nx| \ll 1)$$

7. Multiplikation

(Zwei Strecken werden addiert)

Der Zungenanfang 1 der Skala C wird über den Wert 18 von D gestellt. Durch Verschieben des Läufers zum Wert 13 der Skala C wird die Strecke 13 zur Strecke 18 addiert, und das Ergebnis 234 kann unter dem Läuferstrich auf Skala D abgelesen werden. Aus einer groben Überschlagsrechnung etwa (20 · 10 = 200) ergibt sich die Kommastellung.

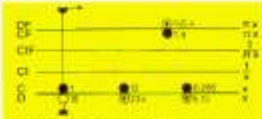


Abb. 12 18 · 13 = 234
18 · 0,285 = 5,13
18 · 7,8 = 140,4

Zum Ablesen der Aufgabe 18 · 7,8 wird die Zunge durchgeschoben, d. h. das Skalenende der Skala C über 18 in D gestellt. Beim ARISTO-Studio läßt sich diese zusätzliche Zungeneinstellung aber vermeiden, wenn man mit dem oberen Skalenpaar CF/DF weiterrechnet.

Die Skalen CF und DF ermöglichen diese vereinfachte Rechnung, weil sie eine Wiederholung der Grundskalen C und D mit dem Unterschied sind, daß ihr Skalenanfang 1 ungefähr in der Mitte des Rechenstabes liegt. Bei der Multiplikation sorgt die 1 der Skala CF dafür, daß automatisch die richtige Anfangseinstellung vorgenommen wird und die Zunge nicht mehr als bis zur Hälfte herausragt.

Wenn sich z. B. im unteren Skalenpaar die Werte 1 auf Skala C und 18 auf Skala D gegenüberstehen, so ist beim oberen Skalenpaar die gleiche Einstellung ablesbar, nämlich 1 auf Skala CF unter 18 auf Skala DF. Folglich kann in beiden Skalenpaaren mit dem Faktor 18 multipliziert werden. Eine Aufgabe wie 3,98 · 2,38 wird mit den Skalen CF/DF gerechnet, indem die 1 von CF unter 3,98 von DF gestellt wird. Der Läuferstrich wird auf 2,38 in Skala CF gebracht und in Skala DF 9,47 abgelesen.

8. Division

(Subtraktion zweier Strecken, Umkehrung der Multiplikation)

Der Läuferstrich wird über den Wert 2620 in D gestellt und die Zahl 17,7 der Skala C unter den Läuferstrich geschoben, so daß beide Werte einander gegenüber stehen. Das Ergebnis 148 wird unter dem Zungenanfang der Skala C abgelesen, bei anderen Beispielen gegebenenfalls unter dem Zungenende.

Abb. 13 2620 : 17,7 = 148
Überschlag 3000 : 20 = 150

Über der 1 in CF kann das Ergebnis auf der Skala DF natürlich ebenfalls abgelesen werden, weil auch in den Skalen CF/DF die Aufgabe 2620 : 17,7 eingestellt ist. Bei der Division mit den Skalen CF/DF stehen die Werte wie bei der Bruchschreibweise übereinander.

Dieselbe Zungeneinstellung gilt aber auch für die Multiplikation 148 · 17,7 = 2620. Der Unterschied zwischen der Multiplikation und Division besteht nur in der Reihenfolge der Einstellungen. Bei der Division wird das Ergebnis jeweils gegenüber dem Skalenanfang oder -ende der Zunge auf dem Körper abgelesen. Ein Durchschieben gibt es nicht. Dieser Vorteil wird in den folgenden Kapiteln wiederholt ausgenutzt werden.

9. Die versetzten Skalen CF und DF

Die Skalen CF und DF sind eine Wiederholung der Grundskalen C und D, gegen diese aber so versetzt, daß $\pi = 3{,}142$ in CF bzw. DF genau über dem Skalenanfang oder -ende der Grundskalen C bzw. D steht. Ihr Wert 1 liegt etwa in der

Rechenstabmitte, so daß mit den versetzten Skalen eine Überteilung der Grundskalen von einer halben Stablänge erzielt wird. Beide Skalenpaare C/D und CF/DF bilden somit eine Arbeitsgemeinschaft, aus der erhebliche Rechenvorteile beim Multiplizieren, Tabellenrechnen und bei Proportionsrechnungen resultieren.

Der Index 1 der Skala CF zeigt stets auf den gleichen Wert von DF wie die 1 oder 10 der Skala C auf D. Die bisher ausgeführten Multiplikationen können auch mit dem oberen Skalenpaar CF/DF begonnen werden, und zwar mit dem Vorteil, daß immer die richtige Anfangseinstellung gewählt wird. Die Entscheidung, ob mit dem linken oder rechten Skalenende angefangen werden muß, ist dann unnötig. Wird eine Division mit den oberen Skalen eingestellt, so stehen Zähler und Nenner auf dem Rechenstab wie in der Bruchschreibweise übereinander.

Kann das Ergebnis einer Aufgabe in dem einen Skalenpaar nicht mehr abgelesen werden, so ist die Ablesung stets im anderen möglich, ein Durchschieben der Zunge gibt es nicht. Die gelben Farbzeilen auf der Zunge sollen daran erinnern, daß die Faktoren auf den beweglichen Zungenskalen C und CF eingestellt werden und das Ergebnis auf D unter C oder auf DF über CF abgelesen wird.

9.1 Tabellenrechnung ohne „Durchschieben" der Zunge

$$y = 29\,x$$

x	1,7	3,45	5,0	10
y	49,3	100	145	290

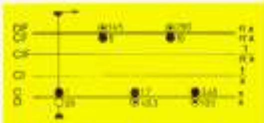


Abb. 14

Für $x = 5$ kann ohne Durchschieben der Zunge auf dem oberen Skalenpaar CF und DF abgelesen werden.

$$y = \frac{28{,}2}{x} = 28{,}2 \cdot \frac{1}{x}$$

x	7,43	2,92	1,567
y	3,795	9,66	18,0

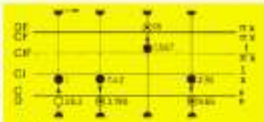


Abb. 15

$$y = \frac{x}{18{,}2} = \frac{1}{18{,}2} \cdot x$$

x	3,17	112,1
y	0,1742	6,16

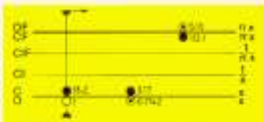


Abb. 16

9.2 Direkte Ablesung von Multiplikationen und Divisionen mit der Zahl π

Da die Skalen CF und DF um den Wert π versetzt sind, ergibt sich der weitere Vorteil, daß beim Übergang von D nach DF bzw. C nach CF eine Multiplikation und in der umgekehrten Richtung eine Division mit π ausgeführt wird. Wenn z. B. der Durchmesser d auf Skala D mit dem Läuferstrich eingestellt wird, kann darüber auf der Skala DF der Kreisumfang $U = \pi\,d$ abgelesen werden. Ähnlich berechnet man die Kreisfrequenz $\omega = 2\,\pi\,f$, wenn $2\,f$ in D eingestellt wird.

Beispiele:		Ablesung auf Skala
$3{,}2^{2,5}$	$= 18{,}3$	LL3
$3{,}2^{0,25}$	$= 1{,}338$	LL2
$3{,}2^{0,025}$	$= 1{,}02955$	LL1
$3{,}2^{-2,5}$	$= 0{,}0546$	LL03
$3{,}2^{-0,25}$	$= 0{,}7476$	LL02
$3{,}2^{-0,025}$	$= 0{,}97134$	LL01
$3{,}2^{3,1}$	$= 36{,}8$	LL3
$3{,}2^{0,36}$	$= 1{,}52$	LL2

Abb. 49 Potenzen

Ableseregeln für $y = a^x$

a) Bei positiven Exponenten x liegen Einstellung und Ergebnis in der gleichen Skalengruppe LL1 – LL3 oder LL01 – LL03, man bleibt also bei der gleichen Farbe der Bezifferung.

Bei negativen Exponenten x muß man von einer Skalengruppe zur anderen wechseln (Farbenwechsel).

b) Analog zur Beschriftung der Skalen am rechten Rechenstabende erfolgt die Ablesung auf der niedriger bezifferten Nachbarskala LL, wenn bei der Variation der Exponenten das Komma um eine Stelle nach links rückt (vergleiche Beispiele im Abb. 49).

c) Wird die Basis mit dem rechten Zungenende eingestellt, werden alle Ablesungen auf der höher bezifferten Nachbarskala vorgenommen (Abb. 52).

Abb. 50 Basis < 1

Für $0 < a < 1$ findet man die Potenzen mit positiven Exponenten in der Skalengruppe LL01 – LL03 und mit negativen Exponenten in der Skalengruppe LL1 – LL3.

Abb. 51 Anfang von C über der Basis

Beispiele:

$0{,}85^{3,25} = 0{,}3896$		siehe Abb. 50
$0{,}85^{-3,25} = 1{,}696$		
$1{,}46^{2,7} = 2{,}78$		siehe Abb. 51 oder Abb. 52
$1{,}46^{-2,7} = 0{,}36$		
$0{,}685^{2,7} = 0{,}36$		
$0{,}685^{-2,7} = 2{,}78$		

Für diese Beispiele sind zwei Lösungen möglich, entweder wird der Zungenanfang oder das Zungenende über die Basis gestellt.

Abb. 52 Ende von C über der Basis

tenzieren. Aus diesem Grunde muß die Umrechnung von der einen Form in die andere häufig durchgeführt werden.

Beispiele: $Z = 4{,}5 + j\,1{,}3 = 4{,}68\,/16{,}13°$ $\quad Z = 6{,}7\,/49° = 4{,}39 + j\,5{,}05$

Der Rechengang ergibt sich aus den vorstehenden Erklärungen und Abb. 47.

17. Die Exponentialskalen LL1-LL3 und LL01-LL03

Die Exponentialskalen sind doppeltlogarithmisch geteilt und auf die Grundskalen bezogen. Der Bereich von 10^{-5} bis 10^{5} ist in sechs Skalen unterteilt. Die drei e^{-x}-Skalen (LL0) gelten für den Bereich 10^{-5} bis 0,99 und die drei e^{x}-Skalen (LL) für den Bereich 1,01 bis 10^{5}. Die Ablesungen auf den Exponentialskalen sind eindeutig, d. h. der Wert 1,35 bedeutet nur 1,35 nicht aber 13,5 oder 135 wie bei den Grundskalen.

Die Exponentialskalen LL und LL0 sind zueinander reziprok. Mit ihnen können die Kehrwerte von Zahlen < 2,5 mit größerer Genauigkeit ermittelt werden, als bei der Verwendung der Skalen CI oder CIF.

$$\text{Beispiel:} \quad \frac{1}{1{,}0170} = 0{,}98328$$

Mit den Exponentialskalen werden Aufgaben der Potenzbildung und des Wurzelziehens auf eine Addition bzw. Subtraktion von Strecken zurückgeführt. Damit können innerhalb des Bereichs beliebige Potenzen, Wurzeln und Logarithmen berechnet werden.

17.1 Potenzen und Wurzeln mit den Exponenten 10 und 100

Die Exponentialskalen sind so angeordnet, daß jeweils beim Übergang von einer LL-Skala zur benachbarten die 10. Potenz oder 10. Wurzel berechnet wird, je nachdem, in welcher Richtung abgelesen wird. Die sich daraus ergebenden Variationen zeigen Abb. 48 und die Beispiele.

Beispiele:			Ablesung auf Skala
$1{,}015^{10}$	$= 1{,}1605$		LL2
$1{,}015^{100}$	$= 4{,}43$		LL3
$1{,}015^{-100}$	$= 0{,}2257$	$= 1/4{,}43$	LL03
$1{,}015^{-10}$	$= 0{,}8617$	$= 1/1{,}1605$	LL02
$1{,}015^{-1}$	$= 0{,}98522$	$= 1/1{,}015$	LL01

Abb. 48 Zusammenhang der LL-Skalen

Diese in der Praxis seltener vorkommenden Beispiele dienen zum besseren Verständnis für den Aufbau der Exponentialskalen.

17.2 Potenzen $y = a^{x}$

Analog zur Multiplikation mit den Grundskalen, wird mit den LL-Skalen und der Grundskala C potenziert.

Rechengang:

a) Einstellen des Anfanges oder Endes der Skala C über den Basiswert „a" der entsprechenden Skala LL mit Hilfe des Läufers.

b) Einstellen des Exponenten x auf der Skala C durch Verschieben des Läufers.

c) Ablesen des Potenzwertes y unter dem Läuferstrich auf der richtigen LL-Skala.

Mit der Einstellung des Basiswertes erhält man eine Tabelleneinstellung für die Funktion $y = a^{x}$. Abb. 49 zeigt die Einstellung für die Funktion $y = 3{,}2^{x}$, wobei der Läufer über dem Exponenten $x = 2{,}5$ und seinen dezimalen Variationen steht.

Bei allen Aufgaben, die den Faktor π enthalten, wird dieser bei der letzten Ablesung durch einen Übergang zu den versetzten Skalen berücksichtigt. Eine Zusammenstellung aller Rechnungen mit dem Faktor π, die mit einer Läufereinstellung möglich sind, zeigt die Abb. 17.

Berechnungen mit dem Faktor 360 vergl. Kap. 19.1.

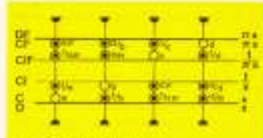


Abb. 17 Rechnen mit π

10. Vereinigte Multiplikation und Division

Bei Rechnungen mit Ausdrücken der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ gilt der Grundsatz:

Zuerst dividieren, dann multiplizieren. Nach der Division 345 : 132 in Abb. 18 braucht das Zwischenergebnis 2,61 nicht abgelesen zu werden, denn der Rechenstab ist bereits für die anschließende Multiplikation eingestellt. Der Läufer wird zum Wert 22 der Skala C verschoben, darunter steht dann das Ergebnis 57,5 in Skala D.

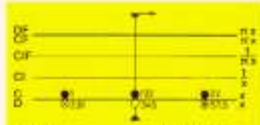


Abb. 18 Überschlag

$\frac{345}{132} \cdot 22 = 57{,}5 \qquad \frac{300}{100} \cdot 20 = 60$

Wird dieses Beispiel durch einen im Nenner stehenden Faktor 19,5 erweitert,

$$\frac{345 \cdot 22}{132 \cdot 19{,}5} = 2{,}95$$

kann anschließend an die Lösung in Abb. 18 dividiert werden, indem der Wert 19,5 der Skala C unter den Läuferstrich gebracht wird, so daß 57,5 durch 19,5 geteilt wird. Stehen bei derartigen Aufgaben weitere Faktoren im Zähler und im Nenner, wird einfach abwechselnd dividiert und multipliziert. Die rhythmische Abwechslung von Zungen und Läufereinstellungen sorgt für einen gleichbleibenden Fluß der Rechnung mit einem Minimum an Einstellungen.

Es kann bei derartigen Aufgaben vorkommen, daß die Zunge nach der Division zu weit aus dem Rechenstab herausragt und die Zunge vor der Multiplikation durchgeschoben werden muß. Durch die richtige Wahl der Divisionseinstellung mit C/D oder CF/DF läßt sich dieser Sonderfall oft vermeiden.

11. Die Kehrwertskalen CI und CIF

Die Skala CI ist genauso unterteilt wie die Grundskalen C und D, sie verläuft in der umgekehrten Richtung von rechts nach links und ist zur Vermeidung von Ablesefehlern rot beziffert.

Wird der Läufer auf irgendeinen Wert x in Skala C gestellt, kann sein Kehrwert 1/x in CI abgelesen werden, wie die Skalenbezeichnung am rechten Rand angibt. Über 5 in C steht 1/5 = 0,2 in CI. Wichtiger ist aber, daß die Kehrwertbildung auch für die umgekehrte Richtung gilt, nämlich beim Übergang von CI nach C: z. B. steht unter 4 in CI der Wert 1/4 = 0,25 in C.

Ein nur gelegentliches Ablesen von Kehrwerten würde das Vorhandensein der Skala CI nicht rechtfertigen. Ihr Hauptwert liegt darin, daß sie viel unnötige Einstellarbeit bei zusammengesetzten Aufgaben erspart.

$\frac{4}{5}$ kann als $4 \cdot \frac{1}{5}$ geschrieben werden und $4 \cdot 5$ ist das Gleiche wie $\frac{4}{1/5}$.

Diese Schreibweise ist zwar ungewohnt, hat aber für das Stabrechnen den Vorteil, daß eine Division in eine Multiplikation und umgekehrt eine Multiplikation in eine Division umgewandelt wird. Ein „Spiel" mit einfachen Zahlen wird uns den Wert dieser Umformung am besten zeigen:

1. Bringen wir den Läufer über 6 in D und schieben 2 in C unter den Läuferstrich, dann haben wir die übliche Division 6 : 2 = 3 (Abb. 19). Lassen wir aber den Läufer stehen und bringen durch Verschieben der Zunge die 2 der Skala CI darunter, so erhalten wir die Multiplikation 6 · 2, wobei wir das Ergebnis 12 wie bei einer Division unter der Zungeneins ablesen (Abb. 20). In Wirklichkeit haben wir 6 : 0,5 ausgerechnet, weil mit der 2 in CI gleichzeitig der Kehrwert 0,5 in C unter den Läuferstrich gebracht wurde.

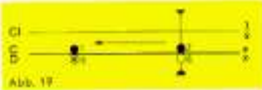


Abb. 19

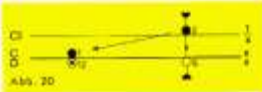


Abb. 20

2. Lassen wir jetzt die Eins der Skala C über 12 in D stehen und bringen den Läufer auf 4 in C, dann erhalten wir die übliche Multiplikation 12 · 4 = 48 (Abb. 21). Verschieben wir aber den Läufer nach 4 in CI, so lesen wir das Ergebnis der Division 12 : 4 = 3 in D ab (Abb. 22). Mit anderen Worten: Da unter 4 in CI der Kehrwert 1/4 = 0,25 in C steht, ist in Wirklichkeit 12 · 0,25 = 3 gerechnet worden.

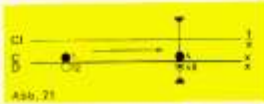


Abb. 21

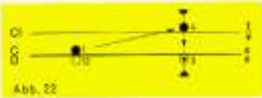


Abb. 22

Es gibt für die Multiplikation und Division also je zwei Einstellmöglichkeiten, von denen sich der geübte Rechner jeweils die bessere aussucht, um bei zusammengesetzten Aufgaben eine abwechselnde Division und Multiplikation zu erhalten.

Die bisher zwischen den Skalen C und CI geschilderten Beziehungen gelten in gleicher Weise auch für die Skalen CF und CIF. Um das einzusehen, ist es nützlich dasselbe „Zahlenspiel" mit der Skalengruppe CF/DF/CIF zu wiederholen. Wer die vorhergehenden Kapitel aufmerksam studiert hat, wird jetzt erkennen, daß die Skala CIF die folgerichtige Ergänzung des Skalensystems ist. Und wer die Vorteile der versetzten Skalen richtig ausnutzt, braucht die Skala CIF genau so oft wie die Skala CI.

Ausdrücke der Form $a \cdot b \cdot c$ oder $\frac{a}{b \cdot c \cdot d}$ usw. werden durch abwechselnde Multiplikation und Division wie die Aufgaben der vereinigten Multiplikation und Division (Kap. 9) gelöst. Während der Rechnung kann von der Skalengruppe C, D und CI zur Skalengruppe CF, DF und CIF übergegangen werden, um bei der Multiplikation das Durchschieben der Zunge zu vermeiden.

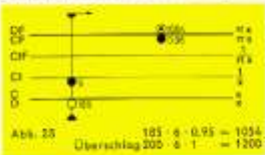


Abb. 23 185 · 6 · 0,95 = 1054
Überschlag 200 · 6 · 1 = 1200

Im Beispiel der Abb. 23 werden 185 auf Skala D und 6 auf Skala CI wie bei einer Division gegenübergestellt und die Multiplikation mit 0,95 auf der oberen Skala CF vorgenommen. Das Ergebnis 1054 erscheint darüber in der Skala DF.

12. Proportionen

Proportionen der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$, sind mit dem Rechenstab besonders einfach und übersichtlich zu rechnen, weil mit der Einstellung eines Verhältnisses

mit der Skala CF anstelle von C zu rechnen, um das Durchschieben der Zunge zu vermeiden.

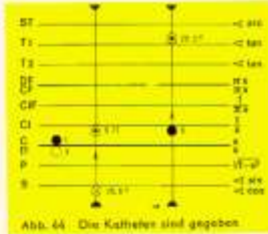


Abb. 44 Die Katheten sind gegeben

Beispiel zu Fall 2:

Gegeben: $a = 3$, $b = 6$

Gesucht: α, β, c

Man beachte: $\tan \alpha = a \cdot \frac{1}{b}$

$$\sin \alpha = a \cdot \frac{1}{c}$$

$$\tan \alpha = 3 \cdot \frac{1}{6} \rightarrow \tan \alpha < 1$$

Wir stellen die 1 der Skala C über die kleinere Kathete 3 und finden $\alpha = 26{,}6°$ auf Skala T1 über der 6 von Skala CI. Wird bei gleicher Zungenstellung der Läufer über 26,6° in Skala S gestellt, steht das Ergebnis $c = 6{,}71$ in Skala CI, denn aus $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ folgt die Proportion $\frac{a}{1} = \frac{\sin \alpha}{1/c}$. $\beta = 90° - 26{,}6° = 63{,}4°$.

Wenn $a > b$, also $\alpha > 45°$ ist, wird der Winkel nicht auf Skala T1, sondern auf Skala T2 abgelesen. Der weitere Rechengang ist der gleiche wie in dem zuvor beschriebenen Beispiel.

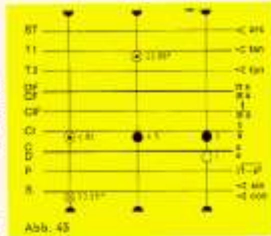


Abb. 45

Beispiel zu Fall 2:

Gegeben: $a = 2$, $b = 4{,}5$

Gesucht: α, β, c.

Wird bei der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke darauf geachtet, daß stets die kleinere Kathete mit a bezeichnet wird, so können die gesuchten Größen entsprechend folgender Proportion gefunden werden.

$$\frac{1}{1/a} = \frac{\tan \alpha}{1/b} = \frac{\sin \alpha}{1/c}$$

Die kleinere Kathete $a = 2$ wird in CI über die rechte 1 der Skala D gestellt. Über $b = 4{,}5$ in CI wird in T 1 der Winkel $\alpha = 23{,}95°$ abgelesen. Der Läuferstrich wird dann über $\sin \alpha = 23{,}95°$ in S gebracht und die Hypotenuse $c = 4{,}92$ wird in CI abgelesen. $\beta = 90° - 23{,}95° = 66{,}05°$.

16.1 Komplexe Zahlen

Diese zwei angeführten Rechnungsarten für das rechtwinklige Dreieck haben besondere Bedeutung bei Koordinaten- und Vektorrechnungen sowie bei Rechnungen mit komplexen Zahlen. Es handelt sich bei derartigen Aufgaben stets um die Verwandlung von rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten oder um die Umkehrung dieser Aufgabe.

Komplexe Zahlen lassen sich in der Komponentenform $Z = a + ib$ leicht addieren oder subtrahieren, in der Vektorform $Z = r \cdot e^{i\varphi} = r/\varphi$ dagegen multiplizieren, dividieren und po-

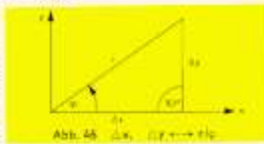


Abb. 46

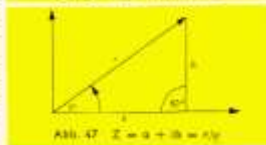


Abb. 47 $Z = a + ib = r/\varphi$

15.6.5 Die Ziffernfolge der ϱ-Marke ist wegen der dezimalen Neugradunterteilung für Neugrad, Neuminuten und Neusekunden gleich:

$$\varrho^g = 63{,}66 = \frac{200}{\pi}$$
$$\varrho^c = 6\,366$$
$$\varrho^{cc} = 636\,600$$

16. Die trigonometrische Berechnung ebener Dreiecke

Der Vorteil der trigonometrischen Skalen liegt nicht allein im Ablesen der trigonometrischen Funktionen. Wichtiger ist, daß mit ihnen gerechnet werden kann, ohne die Funktionswerte ablesen zu müssen.

Der Sinussatz ist ein Musterbeispiel für eine Anwendung der Proportionsrechnung auf dem Rechenstab:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

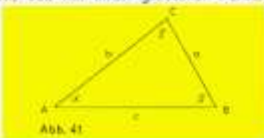


Abb. 41

Mit der Einstellung eines dieser Verhältnisse durch Gegenüberstellung der Strecke auf Skala C und des gegenüberliegenden Winkels auf Skala S bzw. ST sind auch die übrigen Verhältnisse eingestellt, so daß zu jeder Seite der zugehörige Winkel und umgekehrt zu jedem Winkel die gegenüberliegende Seite abgelesen werden kann.

Am häufigsten kommt in der Praxis die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke vor. In diesem Sonderfall ist $\gamma = 90°$ und damit $\sin\gamma = 1$, sowie $\alpha = 90° - \beta$ und $\beta = 90° - \alpha$. Der Sinussatz erhält dann die Form:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{1} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Ferner ist: $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

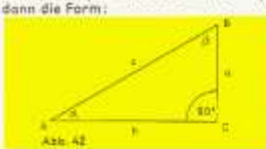


Abb. 42

Je nach den gegebenen Stücken kommen zwei grundsätzliche Rechenoperationen vor:

1. Gegeben sind zwei beliebige Stücke (außer Fall 2).
2. Gegeben sind die Katheten a und b.

Beispiel zu Fall 1:

Gegeben: $c = 5$, $a = 3$

Gesucht: α, β, b

Man beachte: $\beta = 90° - \alpha$

$$\frac{c}{1} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Abb. 43 Die Hypotenuse ist gegeben

Mit der Gegenüberstellung der Hypotenuse 5 in Skala C und 1 in Skala D (als Ersatz für sin 90°) steht gegenüber der Kathete 3 in C dann der zugehörige Winkel $\alpha = 36{,}88°$ in Skala S. Die Zunge unverändert stehen lassen und den Läufer auf 36,88° der roten Bezifferung der Skala S stellen. Dann ist die dem Winkel β gegenüberliegende Seite $b = 4$ in C abzulesen.

Entsprechend verfahren wir, wenn eine Kathete und ein Winkel gegeben sind, indem das Sinusverhältnis aus der Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel mit den Skalen S und C eingestellt wird. Gelegentlich ist es vorteilhafter,

alle weiteren Relationen durch Verschieben des Läufers abgelesen werden. Die Trennungslinie zwischen der Körper- und Zungenskala bildet dabei gleichsam den Bruchstrich. Daher sollte diese Rechnungsart allgemein bevorzugt werden.

Beispiel: 9,5 kg einer Ware kosten DM 6,30, wieviel kosten 8,4 kg?
Die Lösung mit dem Dreisatz lautet:

$$\frac{6{,}30}{9{,}50} \cdot 8{,}4 = 5{,}57$$

Übersichtlicher wird der Rechengang, wenn das Verhältnis der Gewichte und Preise als Proportion aufgestellt wird.

Mit der Gegenüberstellung des gegebenen Gewichtes 9,5 in Skala DF und des Preises 6,30 in Skala CF stehen sich in den Skalen DF/CF und D/C alle Gewichte und Preise gegenüber, deren Verhältnis (Quotient) gleich dem eingestellten ist. DF und D stehen laut der ersten Einstellung alle Gewichte, in Skala CF und C die dazugehörigen Preise. Gegenüber dem Gewicht 8,4 wird demzufolge der Preis 5,57 abgelesen. Weitere Gewicht-Preis-Relationen sind in der Abbildung eingezeichnet.

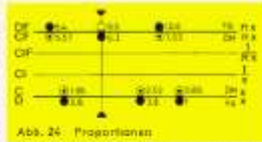


Abb. 24 Proportionen

10,6 kg kosten DM 7,03 (in Skala CF/DF)
3,8 kg kosten DM 2,52 (in Skala C/D)
2,8 kg kosten DM 1,86 (in Skala C/D)
1 kg kostet DM 0,66 (in Skala C/D)

Die Proportion kann also beliebig fortgesetzt werden:

$$\frac{\text{kg}}{\text{DM}} = \frac{9{,}5}{6{,}3} = \frac{8{,}4}{5{,}57} = \frac{10{,}6}{7{,}03} = \frac{3{,}8}{2{,}52} = \frac{2{,}8}{1{,}86} = \frac{1}{0{,}66} = \ldots$$

Die Rechnung mit Proportionen erfolgt weitgehend unabhängig von den bisherigen Regeln. Es ist gleichgültig, wo und wie sich die kg-Werte gegenüberstehen, entscheidend ist, daß die Gewichte dort aufgesucht werden, wo das erste Gewicht eingestellt wurde und daß die Preise entsprechend auf der gegenüberliegenden Skala abgelesen werden. Im obigen Beispiel könnten 6,3 in Skala DF und 9,5 in Skala CF eingestellt werden, dann müßte auch gegenüber 8,4 in CF das Ergebnis 5,57 in DF abgelesen werden.

Dieses Prinzip der direkten Proportion $a : b = c : d$ mit der Aussage je mehr-desto mehr gilt auch für die indirekten Proportionen je mehr-desto weniger bzw. je weniger-desto mehr, die zur Produktgleichheit $a \cdot b = c \cdot d$ führen und mit Hilfe der Kehrwertskalen gelöst werden (vergl. Kap. 11). Schließlich gilt dieses Prinzip auch für die gemischten Proportionen $a \cdot b = c : d$ und $a : b = c \cdot d$

13. Die Skalen A, B und K

Wird der Läuferstrich auf einen beliebigen Wert x der Skala C gestellt, so kann auf der Skala B das Quadrat x^2 und auf K der Kubikwert x^3 abgelesen werden. Im umgekehrten Rechengang erhält man die zweiten bzw. dritten Wurzeln.

a) $2^2 = 4$ $\quad 2^3 = 8$

b) $32{,}7^2 = 3{,}27^2 \cdot 10^2 = 1070$

$32{,}7^3 = 3{,}27^3 \cdot 10^3 = 35000$

c) $\sqrt[2]{9} = 3$ $\quad \sqrt[3]{27} = 3$

d) $\sqrt[2]{51} = 7{,}14$ $\quad \sqrt[3]{364} = 7{,}14$

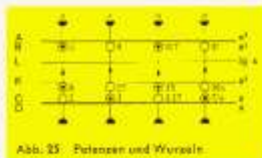


Abb. 25 Potenzen und Wurzeln

Die Stellung des Kommas erhält man am besten durch eine Überschlagsrechnung. Beim Potenzieren und Wurzelziehen ist es vorteilhaft, Zehnerpotenzen abzuspalten, um Zahlenwerte zu erhalten, deren Lösung leicht zu übersehen ist. Die Quadratskalen sind zu diesem Zweck von 1 bis 100, die Kubikskala von 1 bis 1000 beziffert. In welchem Bereich der Läufer eingestellt werden muß, ergibt sich aus dieser Bezifferung der Skalen.

Beispiele:

$\sqrt{3200} = \sqrt{32 \cdot 100} = 10 \cdot \sqrt{32} = 10 \cdot 5{,}66 = 56{,}6$ (Abspalten von 10^{2n})

$\sqrt[3]{0{,}1813} = \sqrt[3]{\frac{181{,}3}{1000}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt[3]{181{,}3} = \frac{1}{10} \cdot 5{,}66 = 0{,}566$ (Abspalten von 10^{3n})

13.1 Das Rechnen mit den Skalen A und B

Die Skalen A und B sind wie die Grundskalen C und D zwei identische Skalen mit dem Unterschied, daß zwei auf die Hälfte verkleinerte Grundskalen in ihnen aneinandergereiht sind. Ihr linker Bereich ist von 1 bis 10 und der rechte von 10 bis 100 beziffert. Mit diesen Skalen können demzufolge alle bisher besprochenen Aufgaben in gleicher Weise gelöst werden, allerdings mit etwas geringerer Genauigkeit, da für ihre Unterteilung nur die halbe Rechenstablänge zur Verfügung steht.

Die nebeneinander angeordneten Skalen haben den Vorteil, daß ein Durchschieben der Zunge grundsätzlich nicht vorkommt.

Bei vielen Aufgaben ist es bequem, auf der Quadratskala weiterrechnen zu können, wenn mit einer Quadrierung begonnen wurde.

14. Die pythagoreische Skala P

In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 1 gilt nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Abb. 26

Zu jeder Einstellung x auf der Grundskala D wird auf der Skala P der Wert $y = \sqrt{1 - x^2}$ abgelesen. Umgekehrt gilt auch $x = \sqrt{1 - y^2}$. Im Beispiel der Abb. 27 ist ersichtlich, daß 0,6 sowohl in Skala D als auch in Skala P eingestellt werden kann, das Ergebnis 0,8 steht immer in der entsprechenden Nachbarskala.

Abb. 27 $\sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

Man wählt jeweils die für die Genauigkeit günstigste Ableseart. Im Beispiel $\sqrt{1 - 0{,}15^2} = 0{,}9887$ wird 0,15 auf Skala D eingestellt.

Beispiel aus der Elektrotechnik:
Scheinlast ≙ 1,0 Wirklast ≙ 0,85
Blindlast ≙ $\sqrt{1 - 0{,}85^2} = 0{,}527$

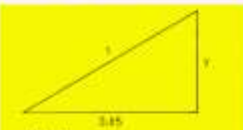


Abb. 28

Diese Art der Lösung ist jedoch nur dann einfach, wenn die Hypotenuse 1, 10 oder 100 usw. ist, insbesondere bei der Umrechnung sin ⟷ cos nach der Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Bei beliebigen rechtwinkligen Dreiecken ist die trigonometrische Lösung eleganter (siehe Kapitel 16).

15.6 ARISTO-Studio 400ᵍ

Die trigonometrischen Skalen S, T1, T2 und ST sind beim ARISTO-Studio 0968/400ᵍ in Neugrad angegeben. Das Rechnen mit den Winkelskalen erfolgt in derselben Weise wie in den Kapiteln 15 bis 15.5 beschrieben. Die aufgeführten Beispiele und die angegebenen Beziehungen ändern sich, da der rechte Winkel 100^g beträgt. Zur Berechnung der Kofunktionen ist zu beachten:

$$\cos \alpha = \sin (100^g - \alpha)$$
$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Für die 400^g-Teilung werden anschließend die Beispiele der Kapitel 15.1 bis 15.5 berechnet.

15.6.1

$\sin 26^g = 0{,}397$

$\sin 82^g = \sqrt{1 - \cos^2 82^g} = 0{,}9063$

$\operatorname{arc} \sin 0{,}54 = 36{,}3^g$

$\cos 75^g = 0{,}383$

$\cos 7^g = \sqrt{1 - \sin^2 7^g} = 0{,}99396$

$\operatorname{arc} \cos 0{,}9852 = 10{,}97^g$

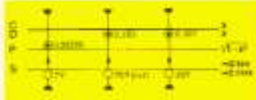


Abb. 38 Sinus und Kosinus

15.6.2

$\tan 14^g = 0{,}2235$

$\tan 80^g = 3{,}078$

$\tan 85^g = 4{,}17$

$\operatorname{arc} \tan 1{,}75 = 66{,}95^g$

$\cot 77^g = 0{,}378$

$\operatorname{arc} \cot 2{,}0 = 87{,}44^g$

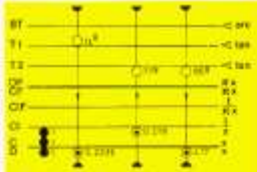


Abb. 39 Tangens und Kotangens

15.6.3 $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \cos (100^g - \alpha) = \cot (100^g - \alpha) \approx \frac{\pi}{200^g} \alpha^g = 0{,}01571 \alpha$

Für große Winkel von sin und kleine Winkel von cos wird die Näherung mit dem Anfang einer Reihenentwicklung gefunden.

Abb. 40

Beispiele: $\cos 2^g = 1 - \frac{0{,}03142^2}{2} = 1 - 0{,}000494 = 0{,}999506$ (Abb. 40)

$\sin 95^g = \cos 5^g = 1 - \frac{0{,}0786^2}{2} = 1 - 0{,}00308 = 0{,}99692$

15.6.4 Die Skala ST ist beim ARISTO-Studio 400^g eine um $\frac{\pi}{200}$ versetzte Grundskala. Die Eins dieser Skala ist die Einstellmarke für $\pi/200$.

a) $0{,}1^g = 0{,}001571$ rad
b) $10^g = 0{,}1571$ rad
c) $0{,}5^g = 0{,}007854$ rad
d) $5^g = 0{,}07854$ rad

werden, und dementsprechend verschiebt sich nur die Kommastelle im Bogenmaß (Abb. 35). Die Eins der Skala ST ist die Einstellmarke für $\pi/180$.

z. B. a) $0{,}1^\circ = 0{,}001\ 745$ rad

b) $10^\circ = 0{,}174\ 5$ rad

c) $5^\circ = 0{,}087\ 25$ rad

d) $0{,}5^\circ = 0{,}008\ 725$ rad

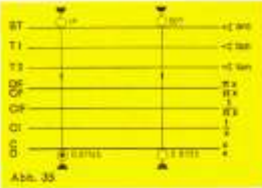


Abb. 35

Sind die kleinen Winkel in Minuten oder Sekunden angegeben, werden diese in Dezimalwerte eines Grades umgewandelt: $1' = 1/60^\circ$ und $1'' = 1/3600^\circ$ (s. auch Ziff. 15.3 und 19.1).

Durch Einstellung der 6 oder 36 von Skala CF unter 1° in Skala ST erhält man eine vorteilhafte Tabellenstellung für derartige Umrechnungen.

15.5 Die Marken ϱ' und ϱ''

Die Marken ϱ' und ϱ'' in der Zungenskala C vereinfachen die Umrechnung ins Bogenmaß, wenn die kleinen Winkel in Minuten oder Sekunden gegeben sind. Ihre Bedeutung ist:

$$\varrho' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 = 3438 \quad \text{für Minuten}$$

$$\varrho'' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 60 = 206265 \text{ für Sekunden}$$

Damit genügt eine Division zur Umrechnung Winkelmaß $\longleftrightarrow$ Bogenmaß:

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}$$

Beispiele:

$$\text{arc } 22' = \frac{22'}{\varrho'} = 0{,}00640 \text{ rad}$$

$$\text{arc } 400' = \frac{400'}{\varrho'} = 0{,}1163 \text{ rad}$$

$$\text{arc } 17'' = \frac{17''}{\varrho''} = 0{,}0000824 \text{ rad}$$

$$\text{arc } 380'' = \frac{380''}{\varrho''} = 0{,}001843 \text{ rad}$$

Abb. 36

Bei Benutzung dieser ϱ-Marken wird das Rechnen mit kleinen Winkeln oder Bögen für beliebige Radien sehr bequem.

$\alpha = \frac{b}{r} \cdot \varrho$, wenn der Winkel gesucht ist.

$b = \frac{\alpha \cdot r}{\varrho}$ wenn die Bogenlänge gesucht ist.

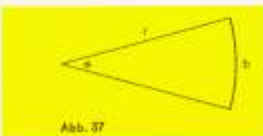


Abb. 37

Beispiele:

$$\alpha = \frac{0{,}6}{45} \cdot \varrho' = 45{,}8'$$

$$b = \frac{48'' \cdot 67}{\varrho''} = 0{,}0156$$

Zur genaueren Ausrechnung von Quadratwurzeln bildet man z. B.

$$\sqrt{0{,}91} = \sqrt{1 - 0{,}09} = 0{,}9540$$

0,09 wird im linken Teil der Skala A eingestellt, dann steht $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ in D und der Wert $\sqrt{1 - 0{,}3^2} = 0{,}9540$ in P. Eine Genauigkeitssteigerung ist bis herab zu ca. $\sqrt{0{,}65}$ gewährleistet. Diese Rechnung ist immer dann zweckmäßig, wenn der Radikand nur wenig kleiner als 0,01 ; 1 ; 100 usw. ist.

15. Die trigonometrischen Funktionen

Alle Winkelfunktionen sind auf die Grundskala D bezogen, und die Winkel sind in 360°-Teilung mit dezimaler Unterteilung angegeben.

Wird ein Winkel mit dem Läufer in der Skala S, T1 und T2 eingestellt, dann steht in Skala D der Wert der entsprechenden trigonometrischen Funktion. Umgekehrt kann zu einem in Skala D eingestellten Funktionswert der zugehörige Winkel in den Skalen S, T1 und T2 abgelesen werden.

Die Winkelbezifferung der dezimal unterteilten Skalen S, T1 und T2 gilt nur für die angeschriebenen Gradwerte.

Der Rechenstab gibt nur die Funktionswerte für Winkel im ersten Quadranten. Zur Reduktion beliebiger Winkel auf den ersten Quadranten sind die Beziehungen der Winkelfunktionen in einer Tabelle zusammengestellt.

	$\pm\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$
sin	$\pm \sin\alpha$	$+ \cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$- \cos\alpha$
cos	$+ \cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$- \cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$
tan	$\pm \tan\alpha$	$\mp \cot\alpha$	$\pm \tan\alpha$	$\mp \cot\alpha$
cot	$\pm \cot\alpha$	$\mp \tan\alpha$	$\pm \cot\alpha$	$\mp \tan\alpha$

15.1 Die Sinusskala S

Die Skala S ist für Sinuswerte von 5,5° bis 90° und rücklaufend für Kosinuswerte von 0° bis 84,5° rot beziffert. Alle auf der Skala D abgelesenen Sinus- oder Kosinuswerte beginnen mit 0, . . .

Die Sinuswerte der Winkel $\alpha > 45^\circ$ sind nach der Beziehung $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ in der rot bezifferten Skala P genauer abzulesen; zum Einstellen des Winkels werden die roten Ziffern der Skala S benutzt. Farbregel für Sinusfunktionen: Stets gleichfarbig bezifferte Skalen einstellen und ablesen.

Wegen $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ gelten für die Kosinuswerte der Winkel $\alpha < 45^\circ$ analoge Verhältnisse mit der Farbregel: Zu jeder Einstellung in Skala S gehört die andersfarbig bezifferte Ablesung in Skala D oder P.

Abb. 29 Sinus

Beispiele:

$$\sin 26^\circ = 0{,}438$$

$$\sin 82^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 82^\circ} = 0{,}9903$$

$$\text{arc}\sin 0{,}54 = 32{,}7^\circ$$

$$\cos 75^\circ = 0{,}2588$$

$$\cos 7^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 7^\circ} = 0{,}99255$$

$$\text{arc}\cos 0{,}9852 = 9{,}87^\circ$$

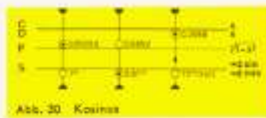


Abb. 30 Kosinus

15.2 Die Tangensskalen T_1 und T_2

Die Tangensskala ist zweiteilig: T_1 reicht von 5,5° bis 45° und T_2 von 45° bis 84,5°. Zu den in den Tangensskalen eingestellten Winkeln werden die Tangenswerte in Skala D abgelesen. Zu den in Skala T_1 eingestellten Winkeln liegen die Funktionswerte zwischen 0,1 und 1,0; zu den in T_2 eingestellten Winkeln zwischen 1,0 und 10,0.

Zum Aufsuchen der Kotangenswerte wird die Formel $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ benutzt; es werden also die Kehrwerte gebildet. Die Kotangenswerte werden für alle Winkel auf der Skala CI abgelesen. Für alle in T_1 eingestellten Winkel liegen die Kotangenswerte zwischen 1,0 und 10,0; für alle in T_2 eingestellten Winkel zwischen 0,1 und 1,0.

Beispiele:

tan 14° = 0,2493
tan 23,6° = 0,437
tan 41,1° = 0,872
tan 51,2° = 1,244
tan 73,4° = 3,35
tan 80° = 5,67
arc tan 1,75 = 60,25°
arc tan 2,0 = 63,43°

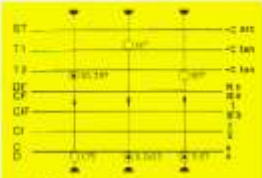


Abb. 31 Tangens

cot 9° = 6,31
cot 23,6° = 2,289
cot 41,1° = 1,146
cot 51,2° = 0,804
cot 73,4° = 0,298
cot 77° = 0,2309
arc cot 2,0 = 26,57°
arc cot 1,75 = 29,74°

Abb. 32 Kotangens

15.3 Die Skala ST

Diese Skala ist eine Fortsetzung der Skalen S und T für Winkel, deren Funktionswerte zwischen 0,01 und 0,1 auf Skala D abgelesen werden. Sie erfüllt aber gleichzeitig die wichtige Aufgabe der Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß beim Übergang zur Skala D.

Wenn sin α und tan α für α < 5,5° sowie cos α und cot α für α > 84,5° bestimmt werden sollen, gilt die Näherung

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \cos(90^\circ - \alpha) \approx \cot(90^\circ - \alpha) \approx \frac{\pi}{180}\alpha^\circ = 0{,}01745\,\alpha$$

Die Skala ST ist von 0,55° bis 6° beziffert, aber im Bogenmaß unterteilt. Dies ermöglicht das Ablesen der genauen Bogenwerte der Winkel auf der Grundskala D als auch der Näherungen der Sinus- und Tangenswerte kleiner Winkel. Die rückläufige rote Bezifferung der ST-Skala von 84° bis 89,45° gilt für die entsprechenden Kosinus- und Kotangenswerte.

Die Übereinstimmung zwischen sin α, tan α und arc α ist bis 4° sehr gut; z. B. sin 4° = 0,0698, tan 4° = 0,0699 und arc 4° = 0,0698. Bei größeren Winkeln zwischen 4° und 6° rechnet man genauer

$$\sin\alpha \approx \alpha\cdot\frac{\sin 6^\circ}{6} \qquad \text{bzw.} \qquad \tan\alpha \approx \alpha\cdot\frac{\tan 6^\circ}{6}$$

Beispiele:

$$\sin 4{,}7^\circ = 4{,}7^\circ\cdot\frac{\sin 6^\circ}{6} = 0{,}0819$$

$$\sin 5{,}3^\circ = 5{,}3^\circ\cdot\frac{\sin 6^\circ}{6} = 0{,}0924$$

$$\tan 4{,}7^\circ = 4{,}7^\circ\cdot\frac{\tan 6^\circ}{6} = 0{,}0822$$

$$\tan 5{,}3^\circ = 5{,}3^\circ\cdot\frac{\tan 6^\circ}{6} = 0{,}0928$$

Abb. 33 sin 4,7° = 0,0819

Zum Berechnen der obigen Beispiele werden die Aufgaben folgendermaßen umgeformt:

$$\sin\alpha = \frac{\sin 6^\circ}{\frac{1}{\alpha}\cdot 6} \qquad\qquad \tan\alpha = \frac{\tan 6^\circ}{\frac{1}{\alpha}\cdot 6}$$

Mit Hilfe des Läufers wird sin 6° in Skala S bzw. tan 6° in Skala T mit dem Winkelwert α in Skala CI untereinandergestellt. Dann wird der Läufer über 6 in Skala CIF geschoben, um das Ergebnis in Skala DF abzulesen.

Die Werte cos α für α < 5,7° und sin α für α > 84,3° können nur ungenau vom Rechenstab abgelesen werden. Hier hilft als Näherung der Anfang einer Reihenentwicklung: $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ (α in rad)

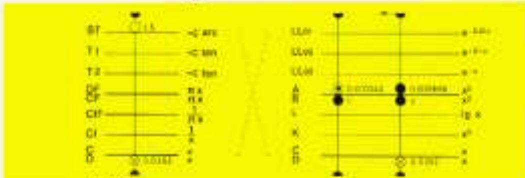


Abb. 34

Beispiele: $\cos 1{,}5^\circ = 1 - \frac{0{,}0262^2}{2} = 0{,}999657$ (Abb. 34)

Zum Berechnen des zweiten Gliedes der Reihenentwicklung wird der Winkel 1,5 in Skala ST mit dem Läufer eingestellt. In Skala D steht der Winkelwert im Bogenmaß und in Skala A sein Quadrat 0,000686. Zum Dividieren wird die 2 in Skala B unter den Läuferstrich gebracht und das Ergebnis 0,000343 in Skala A abgelesen. Abschließend wird dann die Subtraktion 1 − 0,000343 = 0,999657 vorgenommen.

$$\sin 86{,}5^\circ = \cos 3{,}5^\circ = 1 - \frac{0{,}0611}{2} = 0{,}99813$$

15.4 Die Umrechnung Gradmaß ←→ Bogenmaß

Die Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß erfolgt mit einer Läufereinstellung beim Übergang von ST nach D, weil die Skala ST eine um $\frac{\pi}{180}$ gegen D versetzte Grundskala ist. In der umgekehrten Richtung wird das Bogenmaß ins Gradmaß umgerechnet. Diese Rechnung gilt nicht nur für die auf der Skala ST angegebenen Winkel, sondern auf Grund der dezimalen Gradeinteilung gleichzeitig für alle Winkel, denn die 1 kann auch als 0,1°, 10° usw. gelesen

$i_1 = 30$
$r_1 = 0.6$
$r_2 = 0.2$

$$\frac{\log 0.6}{30} = \frac{\log 0.2}{x} \qquad x = 94.5 \text{ Tage}$$

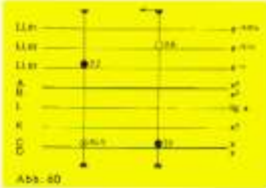


Abb. 60

18.1.4

Will man einen Logarithmus mit einer konstanten Zahl multiplizieren, so werden die Konstante auf Skala C und die Basis des Logarithmus auf Skala LL untereinandergestellt, um wieder eine Tabellenstellung für die Multiplikation der Konstanten mit Logarithmen der eingestellten Basis zu erhalten.

Für $x = c \cdot \log_a y$ wird die Proportionsform geschrieben:

$$\frac{x}{\log_a y} = \frac{c}{1} = \frac{c}{\log_a a}$$

$$2 \cdot \log_{10} 100 = 4$$

$$2 \cdot \log_{10} 1.8 = 0.511$$

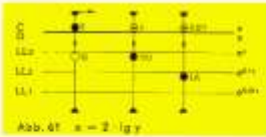


Abb. 61 $x = 2 \cdot \lg y$

Alle Logarithmen der Basis 10 können nach Abb. 61 mit dem Faktor 2 multipliziert werden, mit den LL0-Skalen auch die Logarithmen von Werten < 1.

In der Physik und der Nachrichtentechnik ist es häufig erforderlich, die Dezibel (dB) zu einem gegebenen Amplitudenverhältnis zu berechnen:

$$\text{dB} \triangleq 20 \lg \frac{A_1}{A_2}$$

Beispiele:
20 dB = 20 lg 10
40 dB = 20 lg 100
5,11 dB = 20 lg 1,8

18.2 Hyperbolische Funktionen

Die sinnvolle Anordnung der Exponentialskalen ermöglicht die verhältnismäßig einfache Bildung hyperbolischer Funktionen. Da sich die Potenzwerte mit negativen und positiven Exponenten gegenüberstehen, genügt eine Läuferstellung zur Ablesung von e^{+x} und e^{-x}, woraus sich die hyperbolischen Funktionen leicht errechnen lassen.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$\tanh x = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)}$$

Der Rechenstab ist vor Plastik-Radierern und ihren Abriebprodukten zu schützen, da diese die Oberfläche des ARISTOFAL beschädigen können. Ferner ist eine Lagerung an heißen Plätzen, z. B. auf Heizkörpern oder in praller Sonne, zu vermeiden, da bei höheren Temperaturen als etwa 60° C Verformungen auftreten. Für derart beschädigte Rechenstäbe wird kein Ersatz geleistet.

1.4 Die Rechenstabständer Nr. 770
(nur für 0968)

Die dem ARISTO-Studio 0968 beigegebenen Rechenstabständer Nr. 770 werden seitlich auf den Rechenstab aufgesteckt und geben beiden Seiten eine erhöhte und schräge, d. h. ablesegünstige Stellung auf dem Schreibtisch. Dadurch sind die Skalen, wenn der Rechenstab z. B. bei Tabellenrechnungen auf dem Tisch liegt, gut überschaubar. Die erhöhte Lage des Rechenstabes erlaubt insbesondere eine freie Beweglichkeit für Lupenläufer.

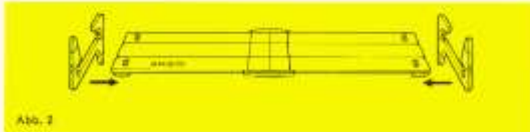


Abb. 2

Beim seitlichen Aufstecken der Rechenstabständer wird die Winkelseite des ARISTO-Studio nach oben gedreht. Die Ständer werden dann so auf die Stege des Rechenstabes geschoben, daß die Riefelung dem Benutzer sichtbar ist und die Nocken der Ständer in die Nut der Verbindungsstege einrasten können.

1.5 Diagrammdarstellung der Beispiele

Im folgenden soll eine abgekürzte Darstellungsweise der Beispiele angewendet werden, die den Lösungsweg und die Reihenfolge der Einstellungen besser angibt als die übliche Abbildung des Rechenstabes. Die Skalen werden durch parallele Linien angedeutet, an deren Ende die Benennung steht. Folgende Symbole ermöglichen das Lesen der Diagramme:

Anfangseinstellung
Jede weitere Einstellung
Endergebnis
Einstellung oder Ablesung eines Zwischenergebnisses
Wenden des Rechenstabes
Pfeile geben die Reihenfolge und Bewegungsrichtung an
Ein senkrechter Strich stellt den Läufer dar

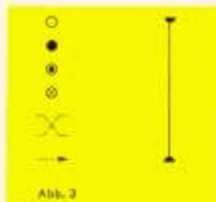


Abb. 3

DER RECHENSTAB ARISTO-STUDIO

Der ARISTO-Studio ist ein universaler Exponential-Rechenstab für Wissenschaftler, Ingenieure und Studenten.

2. Skalenanordnung

2.1 Winkelseite

ST	Tangens, Sinus- und arc-Skala für Winkel von 0,55° bis 6°	∢ arc	Auf dem Körper
T1	Tangensskala für Winkel von 5,5° bis 45°	∢ tan	
T2	Tangensskala für Winkel von 45° bis 84,5°	∢ tan	
DF	Um π versetzte Grundskala	πx	
CF	Um π versetzte Grundskala	πx	Auf der Zunge
CIF	Kehrwertskala zu CF	$1/\pi x$	
CI	Kehrwertskala zu C	$1/x$	
C	Grundskala	x	
D	Grundskala	x	Auf dem Körper
P	Pythagoreische Skala	$\sqrt{1-x^2}$	
S	Sinusskala von 5,5 bis 90° rücklaufend von 0° bis 84,5° für Kosinus rot beziffert	∢ sin ∢ cos	

Abb. 4 Winkelseite

Wenn drei Werte der Proportion bekannt sind, kann der vierte Wert berechnet werden, und mit der ersten Einstellung überblickt man eine Vielzahl von Proportionen. Wir haben hiermit wieder ein für das Rechnen mit dem Rechenstab günstiges Proportionsprinzip, und es kommt nur darauf an, geeignete Aufgaben in diese Proportionsform zu bringen.

18.1.2

$$y = a^{\frac{m}{n}} \rightarrow \log y = \frac{m}{n} \log a$$

$$\frac{\log y}{m} = \frac{\log a}{n}$$

$$y = 4{,}3^{\frac{6{,}8}{2{,}7}} \rightarrow \frac{\log y}{6{,}8} = \frac{\log 4{,}3}{2{,}7}$$

Abb. 59 $\frac{\log 4{,}3}{2{,}7} = \frac{\log 39{,}4}{6{,}8}$

Werden 4,3 auf Skala LL3 und 2,7 auf Skala C übereinandergestellt, dann kann unter 6,8 auf C das Ergebnis 39,4 auf Skala LL3 abgelesen werden.

Ebenso werden natürlich die Abwandlungen dieser Aufgabe gelöst.

$$y = \sqrt[2{,}7]{4{,}3^{6{,}8}} \quad \text{oder} \quad y^{2{,}7} = 4{,}3^{6{,}8}$$

18.1.3

Viele Naturgesetze lassen sich auf die angegebene Proportionsform bringen, wenn die Änderung (Differenz) der einen Variablen proportional der Differenz der Logarithmen der anderen Veränderlichen ist*:

$$\log y_2 - \log y_1 = \text{const}\,(x_2 - x_1)$$

Da außerdem gilt $\quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$,

läßt sich diese Gleichung umschreiben:

$$\log \frac{y_2}{y_1} = \text{const}\,(x_2 - x_1)$$

Eine Änderung von x_1 auf x_2 um das Intervall i hat eine Änderung von y_1 auf y_2 zur Folge.

Bezeichnet man das Verhältnis $\frac{y_2}{y_1}$ mit r, das ist die Restzahl, die den Rest vom ursprünglichen Ganzen angibt, dann lautet die obige Gleichung:

$$\frac{\log r}{i} = \text{const} = \frac{\log r_1}{i_1} = \frac{\log r_2}{i_2} = \cdots$$

Beispiel: Radioaktiver Zerfall.
Ein Stoff zerfalle in 30 Tagen zu 40%, es verbleiben 60% als Rest.
Wann sind noch 20% vorhanden?

*) Vergleiche:

Ruppert, W.: Über die Druckabhängigkeit der Viskosität von Schmierölen — Zeitschrift Brennstoffchemie Nr. 15/16 Bd. 33 (1952) S. 273-278

Ruppert, W.: Eine neue allgemeine Fassung einiger Naturgesetze und ihre Anwendung mit modernen Rechenstäben — Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Bd. 6 Heft 7 (Febr. 1954), S. 316